



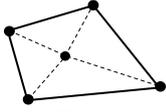
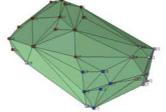
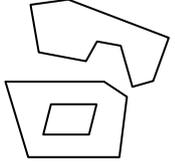

Computer-Graphik II

Verallgemeinerte Baryzentrische Koordinaten

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
cg.in.tu-clausthal.de




Verallgemeinerungen der baryzent. Koord.

1. Was macht man im 2D bei (konvexen) Polygonen mit $k > 3$ Ecken?
 
2. Analog: was macht man im nD bei $k > n+1$ Ecken
 
3. Was macht man bei nicht-konvexen Gebieten?
 
4. Was macht man, falls das Gebiet nicht durch Polygonzug (stückweise lineare Kurve) beschränkt ist, sondern durch eine glatte, geschlossene (konvexe) Kurve?
 

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 2

Verallg. baryzentrische Koord. für $k > 3$ im 2D

- Definition:

Sei Ω ein konvexes Polygon im \mathbb{R}^2 , gegeben durch n Ecken P_1, \dots, P_n , $n \geq 3$, in CCW-Anordnung („*counter-clockwise*“).

Eine Menge von Funktionen $\lambda_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **baryzentrische Koordinaten**, wenn für alle $X \in \Omega$ folgende Bedingungen gelten:

 1. Teilung der Eins (*partition of unity*): $\sum_{i=1}^n \lambda_i(X) = 1$
 2. Lineare Präzision (*linear precision*): $\sum_{i=1}^n \lambda_i(X) P_i = X$
 3. Konvexe Kombination: $\forall i = 1 \dots n : \lambda_i(X) \geq 0$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 3

- Weitere wünschenswerte Eigenschaften:
 - „Schönes“ Verhalten außerhalb von Ω
 - Glattheit: λ_i soll aus C^∞ sein
 - Affine Invarianz

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 4

Interpolationseigenschaft

- Satz:
Solche verallgemeinerten baryzentrischen Koordinaten haben die **Interpolationseigenschaft**.
D.h.: seien in den P_i Datenwerte f_i gegeben, so ist die Funktion

$$f(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(X) \cdot f_i$$
 tatsächlich interpolierend (und nicht etwa approximierend), d.h.

$$\forall i : f(P_i) = f_i$$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 5

Beweis

- Wir zeigen:

$$\lambda_i(P_j) = \delta_{ij} \quad (\text{Kronecker Delta})$$
- 1. Wegen Eigenschaften 1 & 2 kann man **alle linearen** Funktionen reproduzieren. Denn:
Sei $f(Q)$ solch eine lineare Funktion.
Dann ist:

$$\begin{aligned} f(Q) &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} Q + c \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \sum \lambda_i(Q) P_i + c \sum \lambda_i(Q) \\ &= \sum \lambda_i(Q) \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} P_i + c \right) \\ &= \sum \lambda_i(Q) f(P_i) \end{aligned}$$

Eig. 2 (lin. prec.) Eig. 1 (Teilung der Eins)

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 6

2. Definiere Ebene $l(X)$ so, daß

$$l(P_1) = 0$$

$$\forall i \geq 2 : l(P_i) > 0$$

Das geht, da Ω ein **konvexes** Polygon.

3. Aus (1.) folgt

$$l(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(P) \cdot l(P_i) = \sum_{i=2}^n \lambda_i(P) \cdot l(P_i)$$

$l(P_1) = 0$

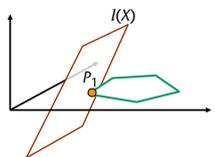
l wurde speziell gewählt, so daß

$$0 = l(P_1) = \sum_{i=2}^n \lambda_i(P_1) l(P_i) \Rightarrow \forall i \geq 2 : \lambda_i(P_1) = 0$$

$l(P_i) > 0$

4. Wegen Eigenschaft (1) ist $1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(P_1) = \lambda_1(P_1)$

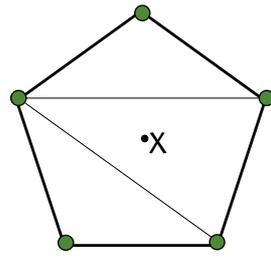
(3.)



G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 7

Triviale Lösungen

- Trianguliere das Polygon (irgendwie)
- Bestimme baryzentrische Koordinaten bzgl. des Dreiecks, in dem X liegt



- Probleme:
 - Die Triangulierung ist nicht eindeutig
 - → Diese verallgemeinerten baryzentrischen Koordinaten sind **nicht eindeutig**
 - Die baryzentrischen Koordinaten sind nur C^0 -stetig
 - Fortsetzung für Punkte außerhalb des Polygons ist nicht klar

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 8

Konstruktion verallg. baryzent. Koordinaten

- Ziel: baryzentrische Koord. für beliebige, konvexe Polygone in 2D
- Beobachtung: wegen $\sum \lambda_i = 1$ gilt

$$\sum \lambda_i P_i = X \Leftrightarrow \sum \lambda_i \cdot (P_i - X) = 0$$

- Hat man Funktionen $w_i = w_i(X)$, für die

$$\sum w_i \cdot (P_i - X) = 0 \quad (1)$$

$$\text{und } \forall i : w_i \geq 0 \quad (2)$$

gilt, so kann man daraus leicht „echte“ baryzentrische Koordinaten machen, indem man

$$\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

setzt

- Suche also im Folgenden w_i , die die Bedingungen (1) & (2) erfüllen.

Notation

- Flächeninhalte:

$$r_i := \|P_i - X\|$$

$$A_i := A_i(X) = \frac{1}{2} \sin \alpha_i \cdot r_i r_{i+1} \\ = \mathcal{F}(\Delta X P_i P_{i+1})$$

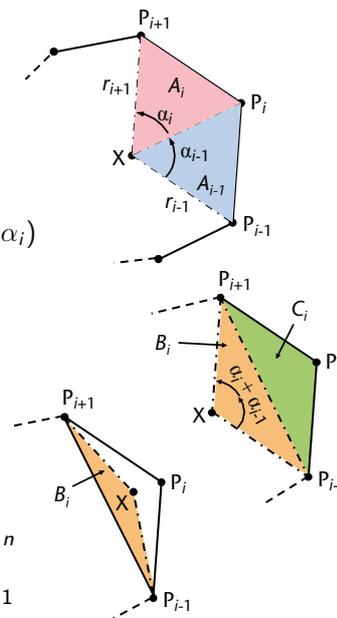
$$B_i := B_i(X) = -\frac{1}{2} r_{i-1} r_{i+1} \sin(\alpha_{i-1} + \alpha_i) \\ = \mathcal{F}(\Delta X P_{i+1} P_{i-1})$$

- Achtung: Vorzeichen von B_i ist negativ, falls X außerhalb $\Delta P_{i-1} P_i P_{i+1}$

$$C_i := C_i(X) = \mathcal{F}(\Delta P_{i-1} P_i P_{i+1}) \\ = A_i + A_{i-1} + B_i$$

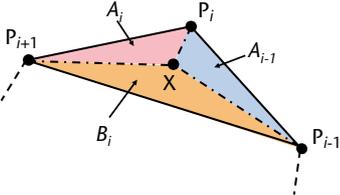
- Indizes: im Folgenden sind alle Indizes "modulo n " gemeint, d.h. $P_i := P_{i \bmod n}$

und somit $P_{n+1} = P_1$, $P_{-1} = P_{n-1}$



Erinnerung:

- Im Dreieck sind $A_i/C_i, B_i/C_i, A_{i-1}/C_i$ baryzentrische Koordinaten, d.h.

$$\frac{A_i}{C_i}(P_{i-1} - X) + \frac{B_i}{C_i}(P_i - X) + \frac{A_{i-1}}{C_i}(P_{i+1} - X) = 0$$


Also:

$$A_i(P_{i-1} - X) + B_i(P_i - X) + A_{i-1}(P_{i+1} - X) = 0$$

Homogene baryzentrische Koordinaten

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 11

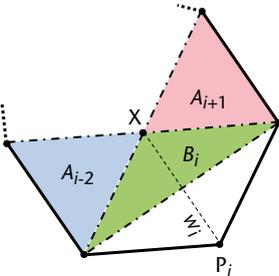
Betrachte jetzt der Reihe nach alle Dreiecke $\Delta P_{i-1} P_i P_{i+1}$

Ansatz: bilde ein gewichtetes Mittel der (homogenen) baryzentrischen Koordinaten bzgl. jedes dieser Dreiecke:

$$w_i := w_i(X) = \sigma_{i-1}A_{i-2} + \sigma_i B_i + \sigma_{i+1}A_{i+1}$$

wobei die $\sigma_i := \sigma(X)$ beliebige Funktionen sein dürfen (zunächst).

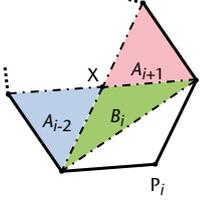
Jeder Vertex ist also an 4 (bzw. 5) baryzentrischen Koordinaten "beteiligt"



G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 12

■ **Behauptung 1:**
 Diese

$$w_i = \sigma_{i-1}A_{i-2} + \sigma_i B_i + \sigma_{i+1}A_{i+1}$$
 erfüllen die Bedingung (1) aus der
 Definition für baryzentrische Koordinaten



■ **Beweis:**

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n w_i(P_i - X) &= \sum_{i=1}^n \sigma_i (A_i(P_{i-1} - X) + B_i(P_i - X) + A_{i-1}(P_{i+1} - X)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 13

■ **Behauptung 2:**
 Falls das Polygon konvex ist und $\forall i: \sigma_i(X) > 0$
 dann ist $\sum w_i(X) > 0$
 für alle X aus dem Inneren des Polygons.

■ **Beweis:**

$$\sum_{i=1}^n w_i(X) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(X) \cdot C_i > 0 \quad , \quad \text{da } \forall i: C_i > 0$$

■ **Achtung:** $\sigma_i > 0$ alleine garantiert noch nicht $w_i > 0$!

- Konvexität des Polygons ist nötig ...

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 14

- Bemerkung: damit klappt dann auch die Normierung von w_i auf λ_i .
 - Erinnerung: $w_i > 0$ benötigt man für Bedingung (2) aus der Definition

- Ziel: suche nun nach geeigneten σ_i , so daß $w_i > 0$ und $\sigma_i > 0$

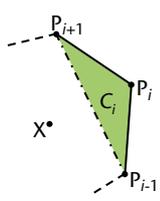
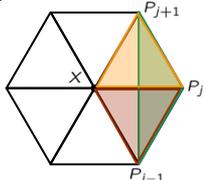
G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 15

Einige Kandidaten

- Naiver Ansatz: wähle $\sigma_i = \frac{1}{c_i}$
 - Damit wäre $\sum w_i(X) \equiv n$
 - Leider ist $w_i(X) > 0$ nicht garantiert
 - Folge: die Interpolationseigenschaft gilt nicht ☹

- Wachspres-Koordinaten: wähle $\sigma_i(X) = \frac{1}{A_{i-1}A_i}$
 - Damit ist

$$w_i := \frac{\mathcal{F}(\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1})}{\mathcal{F}(\Delta XP_{i-1}P_i) \cdot \mathcal{F}(\Delta XP_iP_{i+1})}$$
 - Nachteil: sie verhalten sich in einem nicht-konvexen Polygon unschön, da $\sum w_i(X) = 0$ werden kann, d.h. die λ_i haben dort eine Polstelle

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 16

Der beste Kandidat (zur Zeit) [ca. 2000]

- *Mean Value Coordinates* (MVCs):
 - Wähle
$$\sigma_i = \frac{r_i}{A_{i-1}A_i}$$
 - Damit ist
$$w_i(X) = \frac{r_{i-1}A_i + r_iB_i + r_{i+1}A_{i-1}}{A_{i-1}A_i}$$
 - Mit einigen trigonometrischen Umformungen:
$$w_i = \frac{\tan(\alpha_{i-1}/2) + \tan(\alpha_i/2)}{r_i/2}$$
- Behauptung: die MVCs sind baryzentrische Koordinaten für alle X aus dem Inneren des Polygons
- Klar, denn: wenn X im Inneren \rightarrow alle $\sigma_i > 0$ und alle $w_i > 0$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 18

- Nachweis, daß w_i stimmt:

$$\begin{aligned} w_i &= \sigma_{i-1}A_{i-2} + \sigma_iB_i + \sigma_{i+1}A_{i+1} \\ &= \frac{r_{i-1}}{A_{i-2}A_{i-1}}A_{i-2} + \frac{r_i}{A_{i-1}A_i}B_i + \frac{r_{i+1}}{A_iA_{i+1}}A_{i+1} \\ &= \frac{r_{i-1}}{A_{i-1}} + \frac{r_i}{A_{i-1}A_i}B_i + \frac{r_{i+1}}{A_i} = \dots \end{aligned}$$
- Dann: für A_i und B_i die Flächenformeln mit sin einsetzen und trigonometrische Identitäten verwenden

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 19

Erweiterung auf nicht-konvexe Gebiete

- Lemma (ohne Beweis):
 Sei ein konvexes Polygon \mathcal{P} gegeben.
 Bezeichne die MVCs eines Punktes X bzgl. \mathcal{P} mit $w_i, i=1\dots n$.
 \mathcal{P} werde nun durch Einfügen eines Punktes verfeinert. Bezeichne dieses verfeinerte Polygon mit $\hat{\mathcal{P}}$.
 Bezeichne die MVCs von X bzgl. $\hat{\mathcal{P}}$ mit $\hat{w}_i, i=1\dots n+1$.
 Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \hat{w}_i = \sum_{i=1}^n w_i$$
- Konsequenz: damit sind auch die λ 's für $\hat{\mathcal{P}}$ wohl definiert

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 21

Satz:

Sei \mathcal{P} ein beliebiges, einfaches Polygon.
 Für alle X , die **nicht** auf dem Rand des Polygons \mathcal{P} liegen, ist

$$\sum w_i(X) \neq 0$$

Beweis:

- Annahme: X im Inneren von \mathcal{P}
- Zeichne Strahlen von X durch die Ecken von \mathcal{P} \rightarrow Verfeinerung von \mathcal{P}
- Nenne die Verfeinerung wieder $\hat{\mathcal{P}}$, und dessen Ecken P_1, \dots, P_n .

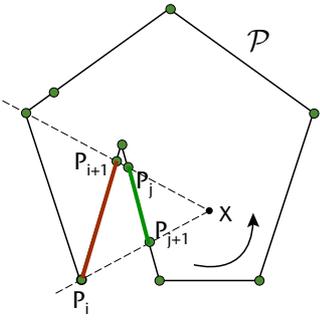
G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 22




- Klassifiziere Kanten in "Entry-Kante" (rot) oder "Exit-Kante" (grün)
 - Entweder gemäß Umlaufsinn; oder gemäß Strahl von X aus
- Beobachtung: Zu jeder Entry-Kante gibt es eine (näher gelegene) Exit-Kante
- Definiere für jede Kante $P_i P_{i+1}$ den (Hilfs-)Wert

$$k_i = \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+1}} \right) \tan \frac{\alpha_i}{2}$$

wobei die Winkel α_i mit Vorzeichen gemäß Umlaufsinn behaftet sind



G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12
Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 23




- Man sieht sofort: $\sum k_i = \frac{1}{2} \sum w_i$

(Die Summanden sind nur etwas anders zusammengefasst, und es fehlt der Faktor 1/2 bei den r_i .)
- Klar ist:
 - falls die Kante $P_i P_{i+1}$
 - Exit-Kante $\rightarrow k_i > 0$
 - Entry-Kante $\rightarrow k_i < 0$
- Sei $P_i P_{i+1}$ eine Entry-Kante
- Dann existiert dazu eine Exit-Kante $P_j P_{j+1}$, die näher an X liegt
- Für deren Winkel gilt $\alpha_j = -\alpha_i$
- Für die Abstände gilt:

$$r_j \leq r_{i+1} \wedge r_{j+1} < r_i \quad \text{oder} \quad r_j < r_{i+1} \wedge r_{j+1} \leq r_i$$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12
Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 25

- Damit gilt

$$k_j = \left(\frac{1}{r_j} + \frac{1}{r_{j+1}} \right) \tan \frac{\alpha_j}{2} > \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+1}} \right) \tan \frac{-\alpha_i}{2} = -k_i$$
- D.h.: zu jedem k_i einer Entry-Kante gibt es ein k_j einer Exit-Kante, so dass $k_i + k_j > 0$
- Also ist $\sum k_i > 0$
- und damit auch $\sum w_i > 0$
- für alle X im Inneren von \mathcal{P}

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 26

- Auch für nicht-konvexe Polygone kann man weiterhin zeigen, daß die *mean value coordinates* die Eigenschaft haben, daß:
 - λ_i auch für X auf dem Rand des Polygons wohl-definiert sind;
 - $\lambda_i(P_j) = \delta_{ij}$;
 - $\lambda_i \in \mathcal{C}^\infty$, außer an den P_j ; dort sind sie nur \mathcal{C}^0

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 27

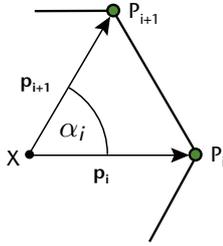
Implementierung (für konvexe Polyeder)

- Praktische Berechnung des $\tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)$:

$$\tan \frac{\alpha_i}{2} = \frac{1 - \cos \alpha_i}{\sin \alpha_i}$$

$$\cos \alpha_i = \frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_{i+1}}{|\mathbf{p}_i| \cdot |\mathbf{p}_{i+1}|} \quad \sin \alpha_i = \frac{|\mathbf{p}_i \times \mathbf{p}_{i+1}|}{|\mathbf{p}_i| \cdot |\mathbf{p}_{i+1}|}$$

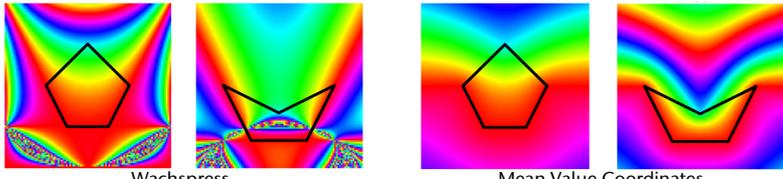
$$\text{Also: } \tan \frac{\alpha_i}{2} = \frac{|\mathbf{p}_i| \cdot |\mathbf{p}_{i+1}| - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_{i+1}}{|\mathbf{p}_i \times \mathbf{p}_{i+1}|}$$
- Falls $|\mathbf{p}_i \times \mathbf{p}_{i+1}| = 0$, dann liegt X auf der Kante;
 - Spezialbehandlung:
 - $X = P_i$ oder $X = P_{i+1}$
 - Sonst: linear zwischen P_i und P_{i+1} interpolieren



G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 28

Anwendung: Interpolation von Farben

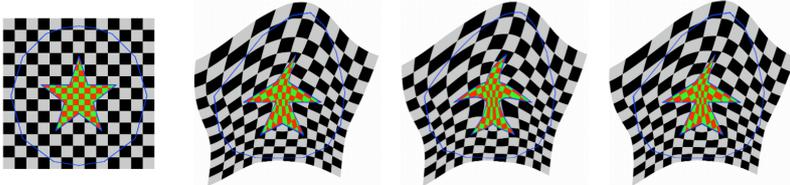
- Gegeben:
 - Ein einfaches Polygon (nicht notwendigerweise konvex)
 - An jeder Ecke eine Farbe
- Aufgabe: das Innere des Polygons mit "schönen" Farbverläufen einfärben (häufige Aufgabe z.B. in Zeichen-Software)
- Lösung:
 - Berechne für jedes Pixel im Inneren dessen baryzentrische Koordinaten bzgl. des gegebenen Polygons
 - Interpoliere die Farben der Ecken mittels dieser baryzentrischen Koord.



Wachspress Mean Value Coordinates

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 36

Anwendung: Image Warping

- Aufgabe: Bild gegeben, verzerre dieses durch Verschieben einiger "Kontrollpunkte"
- Beispiele:
 

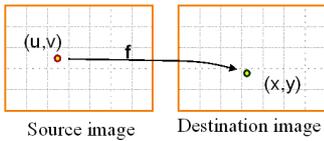
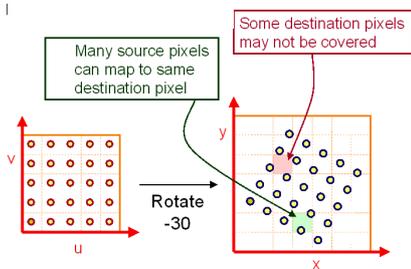

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 37

Algorithmus

- Erste Idee: "Forward Mapping"


```

for u = 0 .. umax:
  for v = 0 .. vmax:
    x, y = f(u,v)
    dst(x,y) ← src(u,v)
      
```

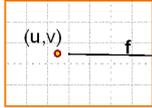

- Konstruktion von f:
 - verwende baryzentrische Koord
 - Bestimme baryz. Koord bzgl. Kontrollpunkte im Quellbild
 - Interpoliere Positionen der Kontrollpunkte im Zielbild
- Probleme:
 

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 38

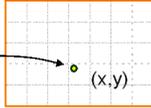
- Bessere Idee: "Reverse Mapping"


```

for x = 0 .. xmax:
  for y = 0 .. ymax
    u, v = f-1(x,y)
    dst(x,y) ← src(u,v)
                
```



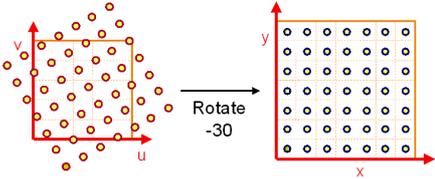
Source image



Destination image

→ f

 - Wieder baryzentrische Interpolation für f^{-1} , diesmal mit vertauschten Rollen
 - Kleines Problem:
 - (u,v) sind keine Pixel-Koord, sondern liegen "dazwischen"
 - Man muß "Resampling" bzw. Interpolation machen

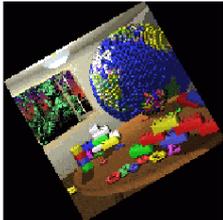


Rotate
-30

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12
Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 39

Resampling

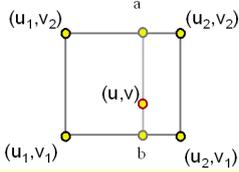
- Einfachste Lösung: Runden
 - Ergibt schwere Artfakte ("Aliasing"; dazu später mehr)
- Zweit-einfachste Lösung: bi-lineare Interpolation



Point



Bilinear



```

for x = 0 .. xmax:
  for y = 0 .. ymax
    u, v = f-1(x,y)
    a = lin.interp. zwischen src(u1,v2) und src(u2,v2)
    b = lin.interp. zwischen src(u1,v1) und src(u2,v1)
    c = lin.interp. zwischen a und b
    dst(x,y) ← c
                
```

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12
Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 40

■ Weitere Beispiele:




■ Heutzutage fertig integriert in Software:




G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 41

Anwendung: Morphing [2004]

- Gegeben: zwei Dreiecks-Meshes M_1 und M_2 mit ...
 - genau gleich vielen Vertices und gleich vielen Dreiecken; und
 - einer Korrespondenz $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ so, daß

$$P, Q, R \text{ ist ein Dreieck in } M_1 \Leftrightarrow$$

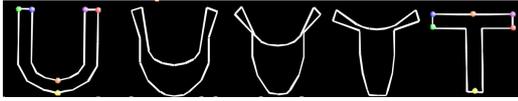
$$\phi(P), \phi(Q), \phi(R) \text{ ist ein Dreieck in } M_2$$
- Aufgabe: eine gleichmäßige "Verformung" von Mesh M_1 in M_2
 - Wegen der Korrespondenz genügt es, die Koordinaten der Vertices von V_1 gleichmäßig (z.B. über 1000 Zeitschritte hinweg) so zu verändern, daß am Ende V_2 entsteht
- Terminologie: M_1 und M_2 heißen auch "*morph targets*", oder "*source*" und "*target*"



G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 42

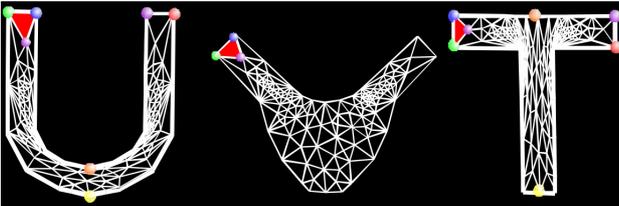
- Sei t der "Morph-Parameter"
- Näive Lösung: lineare Interpolation

$$P(t) = (1 - t)P + t\Phi(P)$$
- Beispiel:

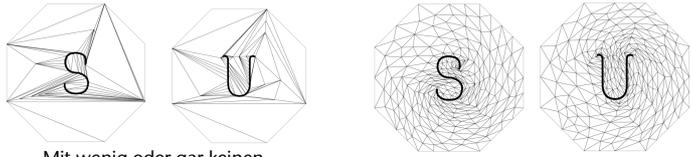


G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 43

- Annahme: beide Meshes M_1 und M_2 befinden sich in der Ebene



- Schließe beide Morph-Targets in einen gemeinsamen, festen(!) Polygonzug ein:



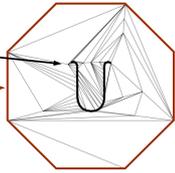
Mit wenig oder gar keinen zusätzlichen Punkten

Vielen zusätzlichen (Steiner) Punkten

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 44

■ Bezeichnungen:

- Innere Vertices $V_I = \{P_i \mid i = 1 \dots n\}$
- Rand-Punkte $V_B = \{P_i \mid i = n + 1 \dots n + k\}$
- $N = n + k$
- E = Menge der Kanten



■ Stelle mittels verallgemeinerter baryzent. Koordinaten ein LGS für alle Vertices auf (jeweils für M_1 und M_2):

- Für jedes $P_i \in V_I, i = 1 \dots n$
bestimme $\lambda_{ij} > 0 \forall (i, j) \in E$
und setze $\lambda_{ij} = 0 \forall (i, j) \notin E$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 45

■ Damit ist

$$P_i = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j, \quad i = 1 \dots n$$

■ Etwas anders aufgeschrieben:

$$P_i - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} P_j = \sum_{j=n+1}^{n+k} \lambda_{ij} P_j, \quad i = 1 \dots n$$

■ Mit $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ ergeben sich also 3 LGSe:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_{12} & \dots & -\lambda_{1n} \\ -\lambda_{21} & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{1,n+1}x_{n+1} + \dots + \lambda_{1,n+k}x_{n+k} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- Analog für y und z

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 46

- Die (simple) Idee:
 1. Interpoliere die λ 's:

$$\lambda_{ij}^{(t)} = (1 - t)\lambda_{ij}^{(1)} + t\lambda_{ij}^{(2)}$$
 2. Löse für jedes t die 3 LGSe \rightarrow ergibt $P_i, i = 1 \dots n$
- Etwas weniger simple Idee ("intrinsic Morphing"):
 1. Interpoliere die α 's und r 's (= Winkel & Distanzen im Mesh):

$$\alpha_{ij}^{(t)} = (1 - t)\alpha_{ij}^{(1)} + t\alpha_{ij}^{(2)} \quad r_{ij}^{(t)} = (1 - t)r_{ij}^{(1)} + tr_{ij}^{(2)}$$
 2. Berechne daraus $\lambda(t)$'s
 3. Löse die 3 LGSe
- Übungsaufgabe: wieviele Variablen werden in den 3 Varianten interpoliert? (für ein bestimmtes t)

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 47

Zur Implementierung

- Bemerkung:
 - Die Matrix A ist nicht notw. symmetrisch
 - Sie ist dünn besetzt
 - Sie ist größtenteils diagonal dominiert, aber keine Bandmatrix
- Verwende einen iterativen Solver
- Starte mit der Matrix von $t-1$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 48

Resultate

- Lineare Interpolation der Vertices:**
- Lineare Interpolation der baryzentrischen Koordinaten:**
- Intrinsische Interpolation:**

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 49

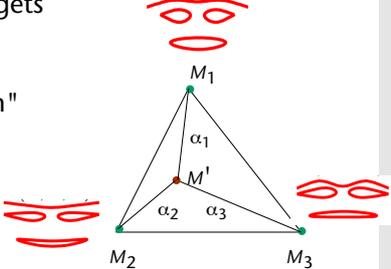
Weiteres Beispiel:

					linear baryzentrisch intrinsisch

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 50

Erweiterung

- Simultanes Morphing mehrerer Targets
- Gegeben n Morph-Targets M_i
- Aufgabe: bestimme ein "in-between"

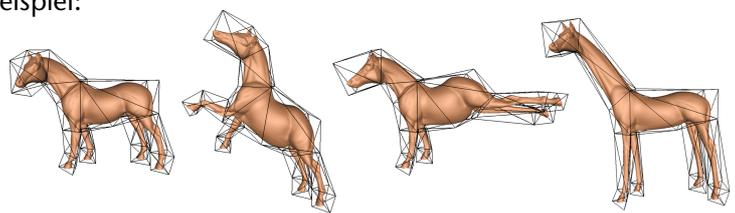
$$M' = \sum \alpha_k M_k$$


- Idee:
 - Bestimme die baryzentrischen Koord. $\lambda_{ij}^{(k)}$ aller M_k bzgl. eines festen Kontrollpolygons (oder Kontrollpolyeders im 3D)
 - Interpoliere die λ 's:

$$\lambda'_{ij} = \sum \alpha_k \lambda_{ij}^{(k)}$$
 - LGSe lösen

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 51

Anwendung: Shape Deformation

- Gegeben: eine Fläche in Form von einer Menge von Dreiecken
- Aufgabe: gezielte Deformation einzelner Teile der Fläche
- Beispiel:
 
 - Das "Gitter" (in der Sprache der geometrischen Modellierung das sog. "Kontroll-Mesh") legt die Deformation fest (wird z.B. durch den Animator vorgegeben)
- Lösung: ...

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 52



Literatur

- Siehe die Papers auf der Vorlesungs-Homepage!
 - Unter "Online-Literatur"

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 53



G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS 12 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 54